## **基础课33 等比数列**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 等比数列的通项公式与前项和公式 | 掌握 | 2023年新高考Ⅱ卷  2023年全国甲卷（理）  2023年全国甲卷（文）  2023年全国乙卷（理）  2023年天津卷 | ★★★ | 逻辑推理  数学运算 |
| 等比数列的性质 | 理解 | 2023年北京卷  2021年新高考Ⅰ卷 | ★★☆ | 逻辑推理  数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，本基础课是高考的热点，命题热点是证明题或以数学文化为背景的题.预计2025年高考命题情况变化不大，但也要加强对有关探索创新和以生活实践情景为载体的试题的训练 | | | |

### **基础知识·诊断**

#### **夯实基础**

##### **一、等比数列的有关概念**

|  |  |
| --- | --- |
| 定义 | 如果一个数列从①第2项起，每一项与它的前一项的②比值都等于同一个常数（不为零），那么这个数列就叫作等比数列，即为非零常数且, |
| 通项公式 | 设是首项为，公比为的等比数列，则通项公式 |
| 等比中项 | 如果在与中间插入一个数，使,,成等比数列，那么④叫作与的等比中项，此时，⑤ |

##### **二、等比数列的前项和公式**

###### **知识 拓展**

1.通项公式的推广：.

2.对任意的正整数，，，，若，则.

3.若等比数列前项和为，则，，仍成等比数列为偶数且除外.

4.在公比为等比数列中，等距离取出若干项也构成一个等比数列，即，，，， 为等比数列，公比为.

5.若或则等比数列递增;

若或则等比数列递减.

6.若数列，（项数相同）是等比数列，则数列，，，，，也是等比数列.

7.由，，并不能立即断言为等比数列，还要验证.

8.在运用等比数列的前项和公式时，必须注意对与分类讨论，防止忽略这一特殊情形导致解题失误.

9.等比数列的前项和可以写成.

10..

#### **诊断自测**

##### **题组1 走出误区**

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 满足，为常数的数列为等比数列.( × )

（2） 为，的等比中项.( × )

（3） 若为等比数列，，则数列也是等比数列.( × )

（4） 若数列的通项公式是，则其前项和为.( × )

2. （易错题）若是2与8的等比中项，是与的等差中项，则的值为或9.

【**易错点**】本题容易忽视讨论公比的正负.

[解析]因为是2与8的等比中项，所以.因为是与的等差中项，所以，联立解得或 所以或.

##### **题组2 走进教材**

3. （人教A版选修②P41·T10改编）已知数列为等比数列，,公比.若是数列的前项积,则的最大值为.

[解析]依题意得，,则,因此.

当时，,即；

当时，,即； 当时，,即.故,的值最大，且最大值为.

4. （多选题）（人教A版选修②P41·T8改编）已知数列的前项和为，,且,则下列结论正确的是( ACD ).

A. B. 是等比数列

C. D. 是递增数列

[解析]由得，，所以.

将与相减得，，即，又,

所以因此不是等比数列.

因为所以.

当时，;

当时，,因此.因为,

所以,因此是递增数列.故选.

##### **题组3 走向高考**

5. [2023·新高考Ⅱ卷]记为等比数列的前项和，若，，则( C ).

A. 120 B. 85 C. D.

[解析]设等比数列的公比为,首项为，则，，显然公比

， ①

， ②

化简②得，解得或（舍去），代入①得.

所以.故选.

### **考点聚焦·突破**

#### **考点一 等比数列的基本量的计算［自主练透］**

1. [2023·全国甲卷]设等比数列的各项均为正数，前项和为，若，，则( C ).

A. B. C. 15 D. 40

[解析]设等比数列的公比为,由题意知,

则,即,所以.又,所以.故.故选.

2. [2023·天津卷]已知为等比数列，为数列的前项和，，则的值为( C ).

A. 3 B. 18 C. 54 D. 152

[解析]设等比数列的公比为,由题意可得，当时，，即， ①

当时，，即， ②

联立①②可得,，则.故选.

3. [2023·全国甲卷]记为等比数列的前项和.若，则的公比为.

[解析]设等比数列的首项为,公比为,则.

因为，

所以，

即，即，即，解得.



**等比数列基本量运算的解题策略**

1.等比数列基本量的运算是等比数列中的一类基本问题，若等比数列中有,,,,这5个量，则一般可以“知三求二”，通过列方程（组）求解.

2.等比数列的前项和公式涉及对公比的分类讨论:当时，的前项和；当时，的前项和.

#### **考点二 等比数列的判定与证明［师生共研］**

典例1 设数列满足,.证明为等比数列，并求的通项公式.

[解析],,

,即,

又,是以1为首项，2为公比的等比数列，

，故.



**等比数列的四种判定与证明方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 定义法 | 若为非零常数，或为非零常数且，，则数列是等比数列 |
| 等比中项法 | 若在数列中，且，则数列是等比数列 |
| 通项公式法 | 若数列的通项公式满足,均为非零常数，的形式，则数列是等比数列，该方法适用于选择题和填空题 |
| 前项和法 | 若数列的前项和公式满足为非零常数，,1的形式，则数列是等比数列，该方法适用于选择题和填空题 |

##### **针对训练**

在数列中,，且，.证明是等比数列，并求数列的前项和.

[解析],

,

即，又,.

, 数列是以3为首项，2为公比的等比数列，则,,

.

#### **考点三 等比数列的性质及其应用［多维探究］**

##### **等比数列项的性质角度1**

典例2（1） [2024·贵阳月考]已知数列是等差数列，数列是等比数列，若,,则的值是( B ).

A. B. 1 C. 2 D. 4

[解析]由等差中项的性质可得,，由等比中项的性质可得,，因此，.故选.

（2） [2023·全国乙卷]已知为等比数列，，，则.

[解析]设的公比为，则，显然，则，即，则，因为，则，则，则，则.

##### **等比数列前项和的性质角度2**

典例3 [2024·哈尔滨校考]已知等比数列的前项和为，若，则( D ).

A. 41 B. 45 C. 36 D. 43

[解析]设，则，

因为为等比数列，所以根据等比数列的性质，可得,,仍成等比数列，因为，所以，所以，故.故选.

##### **等比数列的最值问题角度3**

典例4 已知在等比数列中，，公比，记其前项和为，则对于，使得恒成立的最小整数( A ).

A. 6 B. 3 C. 4 D. 2

[解析]由题意知，，则.故选.



**等比数列的性质问题的解题策略**

1.等比数列的性质可以分为3类：一是通项公式的变形，二是等比中项的变形，三是前项和公式的变形.根据题目条件，认真分析，发现具体的变化特征即可找出解决问题的突破口.

2.涉及等比数列的单调性与最值的问题，一般要考虑公比与首项的符号对其的影响.

##### **多维训练**

1. 在等比数列中，若，则此数列的前10项积为( C ).

A. 50 B. C. D.

[解析]为等比数列，，，，.故选.

2. 已知等比数列的前项和为，且，若，，则( C ).

A. 27 B. 45 C. 65 D. 73

[解析]由等比数列前项和的性质可得，，，成等比数列，

所以，即，

整理可得，解得（舍去）或.

又因为，

所以，解得.故选.

3. 已知正项等比数列的前项和为，且，则的最小值为( B ).

A. 25 B. 20 C. 15 D. 10

[解析]在正项等比数列中，，因为，所以，

易知，，成等比数列，所以，

所以（当且仅当时，等号成立），

因为，所以的最小值为20.故选.